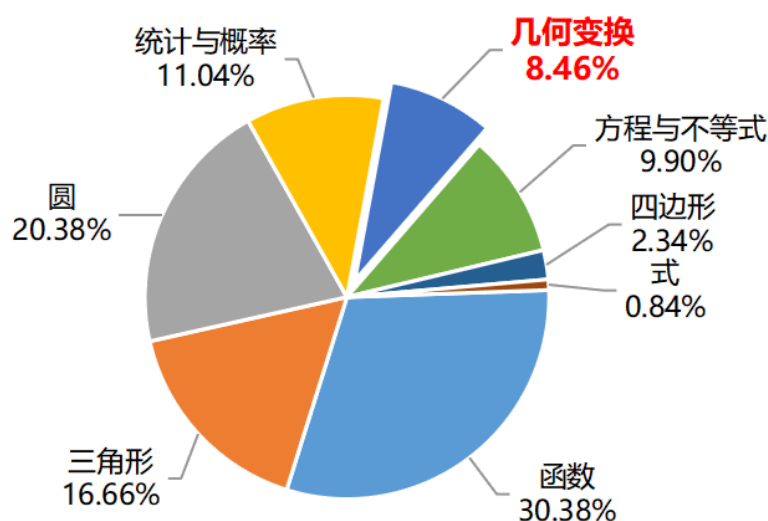


# 第1讲 旋转的概念及性质

旋转属于人教版教材第二十三章的内容，会与三角形、四边形的性质进行综合。本模块为《旋转进阶》，重点包括旋转性质的综合应用，此外需要学生在理解性质的基础上，学会旋转模型，总结一定的解题思路。

本模块难度适中，适用于基础部分的夯实与综合应用，本模块分为旋转的概念及性质、旋转基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

## 知己知彼



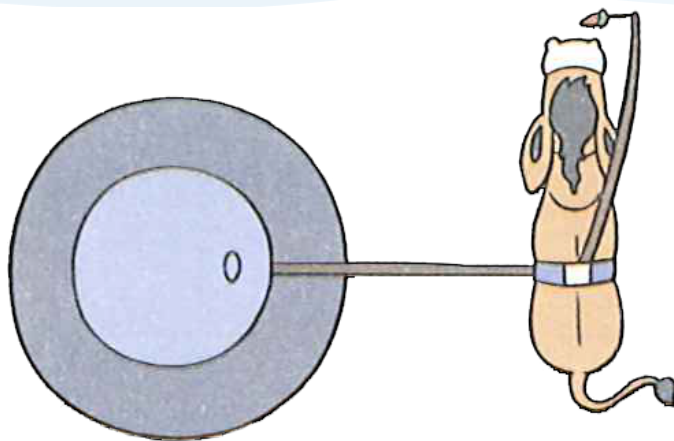
| 知识点     | 难度   | 考频 |
|---------|------|----|
| 旋转与中心对称 | ★★★  | 高  |
| 手拉手模型   | ★★★★ | 中  |
| 角含半角模型  | ★★★★ | 中  |
| 对角互补模型  | ★★★★ | 中  |

## 思考：

观察下图我们能分析出什么呢。



【备注】驴永远吃不到胡萝卜

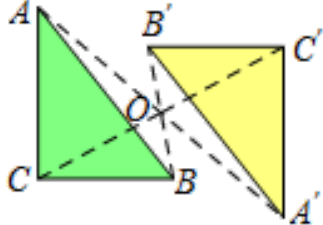


## 一、 旋转与中心对称

### 1. 旋转的定义

|                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">旋转定义</p>  | <p>在平面内，将图形绕一个定点 <math>O</math> 沿某个方向（逆时针或顺时针）转动一定的角度，这样的图形变换叫做旋转．这个定点 <math>O</math> 叫做 <u>旋转中心</u>，转动的角称为 <u>旋转角</u>．</p> <p>图形上的点 <math>P</math> 经过旋转变成为点 <math>P'</math>，那么这两个点叫做旋转的 <u>对应点</u>．</p> <div data-bbox="938 504 1295 869" data-label="Image"> </div> <p>如图，将 <math>\triangle PMQ</math> 绕点 <math>O</math> 顺时针旋转 <math>60^\circ</math> 得到 <math>\triangle P'M'Q'</math>，点 <math>O</math> 是旋转中心，<math>P</math> 与 <math>P'</math> 是对应点，<math>M</math> 与 <math>M'</math> 是对应点，<math>Q</math> 与 <math>Q'</math> 是对应点，<br/> <u><math>\angle POP'</math>、<math>\angle MOM'</math>、<math>\angle QOQ'</math></u> 是旋转角．</p> |
| <p style="text-align: center;">旋转三要素</p> | <p>① <u>旋转中心</u>；② <u>旋转方向</u>；③ <u>旋转角</u>．</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p style="text-align: center;">旋转性质</p>  | <p>① <u>对应点到旋转中心的距离相等</u>．<br/> <math>OP = \underline{OP'}</math>，<math>OQ = \underline{OQ'}</math>，<math>OM = \underline{OM'}</math>．</p> <p>② <u>对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角</u>．<br/> <u><math>\angle POP' = \angle QOQ' = \angle MOM'</math></u>．</p> <p>③ <u>旋转前后图形全等</u></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

## 2. 中心对称与中心对称图形

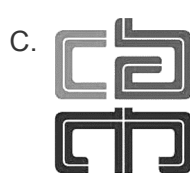
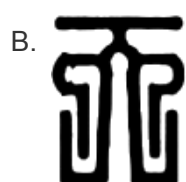
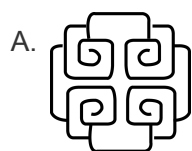
|                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"><b>中心对称定义</b></p> | <p>把一个图形绕着某一点旋转 <math>180^\circ</math>，如果它能够与另一个图形 <u>重合</u>，那么就说这两个图形关于这个点 <u>对称</u> 或 <u>中心对称</u>，这个点叫做 <u>对称中心</u>．这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的 <u>对称点</u>．</p>  |
| <p style="text-align: center;"><b>中心对称性质</b></p> | <p>中心对称的两个图形，对称点所连线段都 <u>经过</u> 对称中心，而且被对称中心所 <u>平分</u></p>                                                                                                                                                                                        |

### 🧠 举个“栗子”

#### 栗子1

#### 1. 2021年天津河东区初三中考一模第3题3分 ★

《国家宝藏》节目立足于中华文化宝库资源，通过对文物的梳理与总结，演绎文物背后的故事与历史，让更多的观众走进博物馆，让一个个馆藏文物鲜活起来，下面四幅图是我国一些博物馆的标志，其中是轴对称图形但不是中心对称图形的是（ ）．



**【答案】** B

**【解析】** A 选项：既是轴对称图形，又是中心对称图形，所以本选项不符合题意，故 A 错误；

B 选项：是轴对称图形，不是中心对称图形，所以本选项符合题意，故 B 正确；

C 选项：既不是轴对称图形，又不是中心对称图形，所以本选项不符合题意，故 C 错误；

D 选项：不是轴对称图形，是中心对称图形，所以本选项不符合题意，故 D 错误．

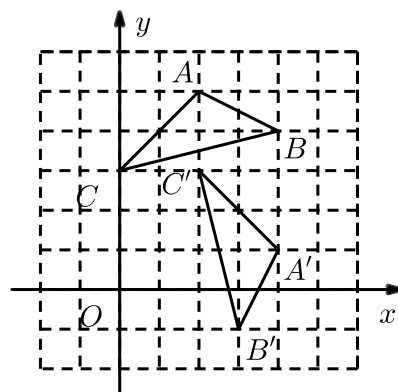
故选 B．

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

栗子2

2. 2015年天津南开区初三中考一模第10题3分 ★★

如图，将  $\triangle ABC$  绕点  $P$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle A'B'C'$ ，则点  $P$  的坐标是（ ）。



A. (1,1)

B. (1,2)

C. (1,3)

D. (1,4)

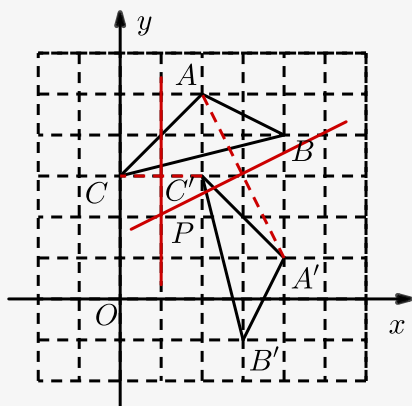
【答案】B

【解析】 $\because$  将  $\triangle ABC$  以某点为旋转中心，顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle A'B'C'$ ，

$\therefore$  点  $A$  的对应点为点  $A'$ ，点  $B$  的对应点为点  $B'$ ，

作线段  $AA'$  和  $BB'$  的垂直平分线，它们的交点为  $P(1,2)$ ，

$\therefore$  旋转中心的坐标为  $(1,2)$ 。

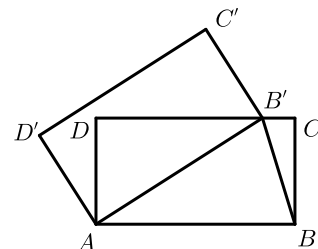


【标注】【知识点】确定旋转中心

栗子3

3. 2021年天津和平区初三中考零模第9题3分 ★★

如图，矩形  $ABCD$  绕点  $A$  逆时针旋转  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) 得到矩形  $AB'C'D'$ ，此时点  $B'$  恰好在  $DC$  边上、若  $\angle B'BC = 15^\circ$ ，则  $\alpha$  的大小为（ ）。



A.  $15^\circ$

B.  $25^\circ$

C.  $30^\circ$

D.  $45^\circ$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形 ,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\because \angle B'BC = 15^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = 75^\circ ,$$

由旋转性质可知  $AB = AB'$  ,  $\angle BAB' = \alpha$  ,

$$\therefore \angle ABB' = \angle AB'B = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle \alpha = \angle BAB'$$

$$= 180^\circ - \angle ABB' - \angle AB'B$$

$$= 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ$$

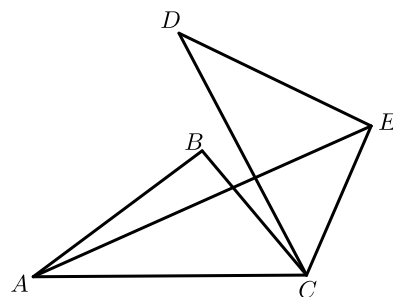
$$= 30^\circ .$$

故选 C .

**【标注】** 【知识点】 旋转的性质

4. 2021年天津和平区初三中考二模第11题3分 ★★

如图 , 以点  $C$  为旋转中心 , 把  $\triangle ABC$  顺时针旋转得  $\triangle DEC$  . 记旋转角为  $\alpha$  , 连接  $AE$  ,  $\angle AED$  为  $\beta$  , 则  $\angle BAE$  的度数为 ( ) .



A.  $\alpha - \beta$

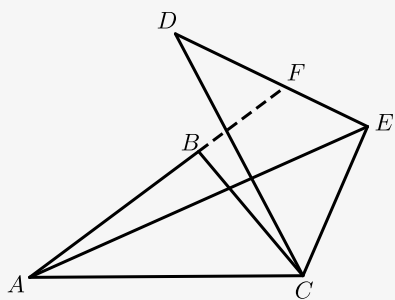
B.  $\frac{\alpha}{2} + \beta$

C.  $\frac{\beta}{2}$

D.  $\alpha - \frac{\beta}{2}$

**【答案】** A

**【解析】** 延长  $AB$  交  $DE$  于点  $F$  ,



由以点  $C$  为旋转中心，把  $\triangle ABC$  顺时针旋转得  $\triangle DEC$ ，记旋转角为  $\alpha$ ，

又  $\because \angle AED$  为  $\beta$ ，则  $\angle BAE$  的度数为  $\alpha - \beta$ 。

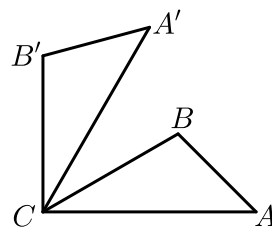
故选 A。

【标注】【知识点】旋转的性质

栗子4

5. 2020年天津东丽区初三中考一模第9题3分 ★★★

如图，将  $\triangle ABC$  绕点  $C$  按逆时针方向旋转  $60^\circ$  后得到  $\triangle A'B'C$ ，若  $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B' = 105^\circ$ ，且  $AB = \sqrt{2}$ ，则  $A'$ ， $B$  两点之间的距离为（ ）。



A.  $\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{3}$

C. 2

D.  $1 + \sqrt{3}$

【答案】A

【解析】  $\because \triangle ABC$  绕点  $C$  逆时针方向旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle A'B'C$ ，

$\therefore \triangle A'B'C \cong \triangle ABC$ 。

又  $\because \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle B'A'C = \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore$  在  $\triangle A'B'C$  中， $\angle A'CB = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ 。

又  $\because \angle BCB' = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A'CB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore$  在  $\triangle A'CB'$  和  $\triangle A'CB$  中，

$$\begin{cases} B'C = BC \\ \angle B'CA' = \angle A'CB \\ A'C = A'C \end{cases}$$

$\therefore \triangle A'CB' \cong \triangle A'CB$ ，

$\therefore A'B' = A'B$ 。

$$\text{又} \because A'B' = AB = \sqrt{2},$$

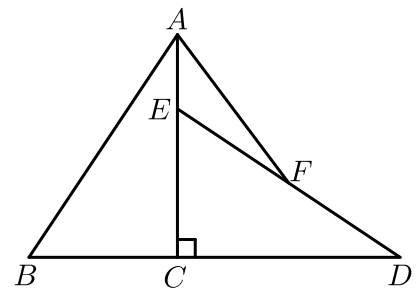
$$\therefore A'B = \sqrt{2}.$$

故选 A.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

6. 2016年天津红桥区初三中考三模第10题3分 ★★★

如图，在中  $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $AC = 6$ ， $BC = 4$ ，将绕直角顶点  $C$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle DEC$ ，若点  $F$  是  $DE$  的中点，连接  $AF$ ，则  $AF$  的长为（ ）.



A. 3

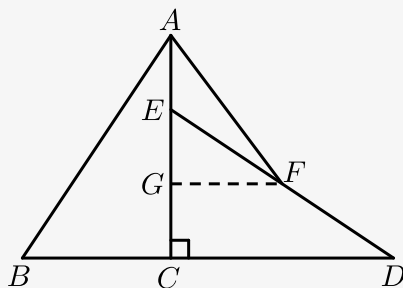
B. 4

C. 5

D.  $4\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】如图所示：过点  $F$  作  $FG \perp AC$ ，



$\because$  由旋转的性质可知： $CE = BC = 4$ ， $CD = AC = 6$ ， $\angle ECD = \angle BCA = 90^\circ$ ，

$\therefore AE = AC - CE = 2$ ，

$\because FG \perp AC$ ， $CD \perp AC$ ，

$\therefore FG \parallel CD$ ，

又  $\because$  点  $F$  是  $DE$  的中点，点  $G$  是  $CE$  的中点，

$\therefore EG = 2$ ， $FG = \frac{1}{2}CD = 3$ ，

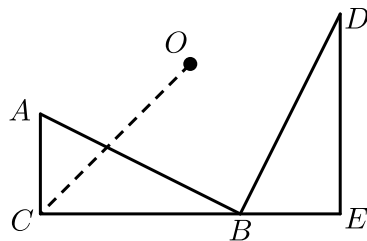
$\therefore AG = AE + EG = 4$ ，

$\therefore AF = \sqrt{AG^2 + FG^2} = 5$ 。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

7. 2015~2016学年6月天津南开区初三下学期月考三模第10题4分 ★★

如图，将  $\text{Rt}\triangle ABC$  绕  $O$  点旋转  $90^\circ$ ，得  $\text{Rt}\triangle BDE$ ，其中  $\angle ACB = \angle BED = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，则点  $C$  与旋转中心点  $O$  的距离  $OC$  的长是（ ）。



A.  $7\sqrt{2}$

B.  $6\sqrt{2}$

C. 14

D. 12

**【答案】** A

**【解析】** 如图，连结  $OA$ 、 $OB$ 、 $OE$ 、 $OD$ ，

$\because \text{Rt}\triangle ABC$  绕  $O$  点旋转  $90^\circ$ ，得  $\text{Rt}\triangle BDE$ ，

$\therefore OA = OB = OD$ ， $\angle AOB = \angle BOD = 90^\circ$

，

$\therefore \triangle AOB$  和  $\triangle BOD$  是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABO = \angle OBD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ，

又  $\because \angle ABC + \angle DBE = 90^\circ$ ，

$\therefore$  点  $B$ 、 $C$ 、 $E$  在同一直线上，

$\because$  旋转角是  $90^\circ$ ，

$\therefore \triangle COE$  是等腰直角三角形，

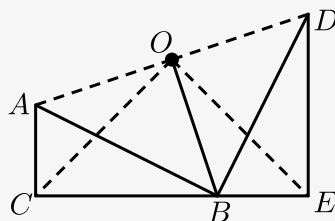
$\because AC = 6$ ， $AB = 10$ ，

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$\therefore CE = BC + BE = 8 + 6 = 14$ ，

$\therefore OC = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 14 = 7\sqrt{2}$ 。

故答案为 A。

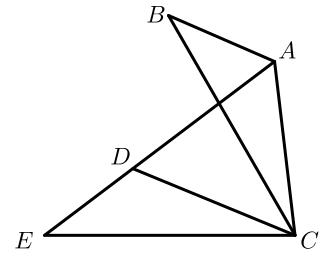


**【标注】**【知识点】旋转性质综合应用

栗子5

#### 8. 2021年天津中考真题第11题3分 ★★★

如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 120^\circ$ ，将  $\triangle ABC$  绕点  $C$  逆时针旋转得到  $\triangle DEC$ ，点  $A$ ， $B$  的对应点分别为  $D$ ， $E$ ，连接  $AD$ 。当点  $A$ ， $D$ ， $E$  在同一条直线上时，下列结论一定正确的是（ ）。



- A.  $\angle ABC = \angle ADC$     B.  $CB = CD$     C.  $DE + DC = BC$     D.  $AB \parallel CD$

**【答案】** D

**【解析】**  $\because \triangle DEC$  由  $\triangle ABC$  旋转而得，

$$\therefore \triangle DEC \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEC, AC = CD, \angle EDC = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle DEC + \angle DCE,$$

$$\therefore \angle ADC > \angle ABC, \text{ 故 A 错误,}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore BC > AC,$$

$$\therefore BC > CD, \text{ 故 B 错误,}$$

$$\therefore \triangle DEC \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore EC = BC,$$

在  $\triangle DEC$  中，

$$DE + DC > EC,$$

$$\therefore DE + DC > BC, \text{ 故 C 错误,}$$

$$\therefore \triangle DEC \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore AC = DC,$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 为等边三角形,}$$

$$\therefore \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BAD,$$

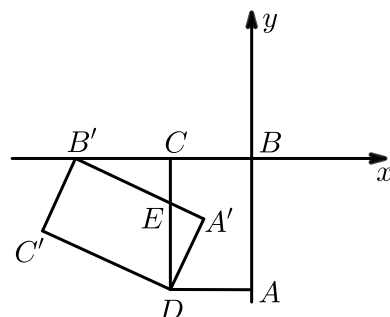
$$\therefore AB \parallel CD, \text{ 故 D 正确.}$$

故答案为：D。

**【标注】**【知识点】旋转型全等

9. 2019~2020学年10月天津和平区耀华嘉诚国际中学初三上学期月考第11题3分 ★★★

如图，在平面直角坐标系中，长方形  $ABCD$  的顶点  $B$  在坐标原点，顶点  $A$ 、 $C$  分别在  $y$  轴、 $x$  轴的负半轴上，其中  $A(0, -4)$ ， $C(-2, 0)$ ，将矩形  $ABCD$  绕点  $D$  逆时针旋转得到矩形  $A'B'C'D$ ，点  $B'$  恰好落在  $x$  轴上，线段  $B'A'$  与  $CD$  交于点  $E$ ，那么点  $E$  的坐标为 ( ) .



- A.  $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$       B.  $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$       C.  $(-2, -2)$       D.  $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$

**【答案】** A

**【解析】** 如图，

连接  $BD$ ， $B'D$ ，

$\because$  矩形  $ABCD$  绕点

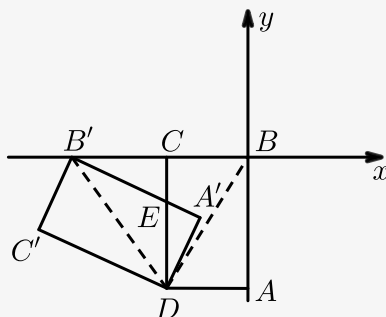
$D$  逆时针旋转得到

矩形  $A'B'C'D$ ，

$\therefore BD = B'D$ ，

又  $\because DC \perp BB'$ ，

$A(0, -4)$ ， $C(-2, 0)$



$\therefore BC = B'C = 2 = A'D$ ，

又  $\because \angle B'CE = \angle DA'E = 90^\circ$ ， $\angle B'EC = \angle DEA'$ ，

$\therefore \triangle B'EC \cong \triangle DEA'$ ，

$\therefore B'E = DE$ ，

设  $CE = x$ ，则  $B'E = DE = 4 - x$ ，

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle B'EC$  中， $CE^2 + B'C^2 = B'E^2$ ，

$\therefore x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$ ，

解得  $x = \frac{3}{2}$ ，

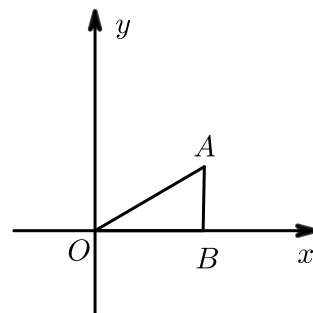
$\therefore E\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ 。

故选 A。

**【标注】** 【知识点】 旋转性质综合应用

10. 2016~2017学年天津南开区初三上学期期中模拟第10题3分 ★★

如图， $\triangle ABO$ 中， $AB \perp OB$ ， $OB = \sqrt{3}$ ， $AB = 1$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 $O$ 旋转 $150^\circ$ 后得到 $\triangle A_1B_1O$ ，则点 $A_1$ 的坐标为（ ）．



- A.  $(-1, -\sqrt{3})$  B.  $(-1, -\sqrt{3})$ 或 $(-2, 0)$   
C.  $(-\sqrt{3}, -1)$ 或 $(0, -2)$  D.  $(-\sqrt{3}, -1)$

【答案】 B

【解析】 $\because \triangle ABO$ 中,  $AB \perp OB$ ,  $OB = \sqrt{3}$ ,  $AB = 1$ ,

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ .$$

如图 1,

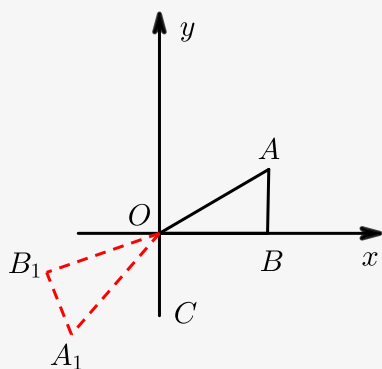


图1

当  $\triangle ABO$  绕点  $O$  顺时针旋转  $150^\circ$  后得到  $\triangle A_1B_1O$ ,

则  $\angle A_1OC = 150^\circ - \angle AOB - \angle BOC = 150^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ,

则易求  $A_1(-1, -\sqrt{3})$ .

如图 2,

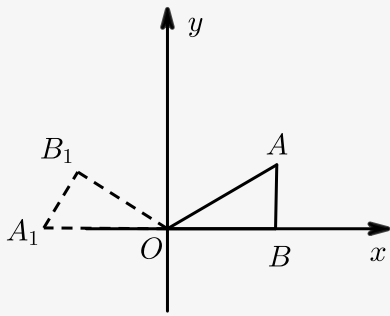


图2

当  $\triangle ABO$  绕点  $O$  逆时针旋转  $150^\circ$  后得到  $\triangle A_1B_1O$ ,

则点  $A_1$  在  $x$  轴上,

则易求  $A_1(-2,0)$ .

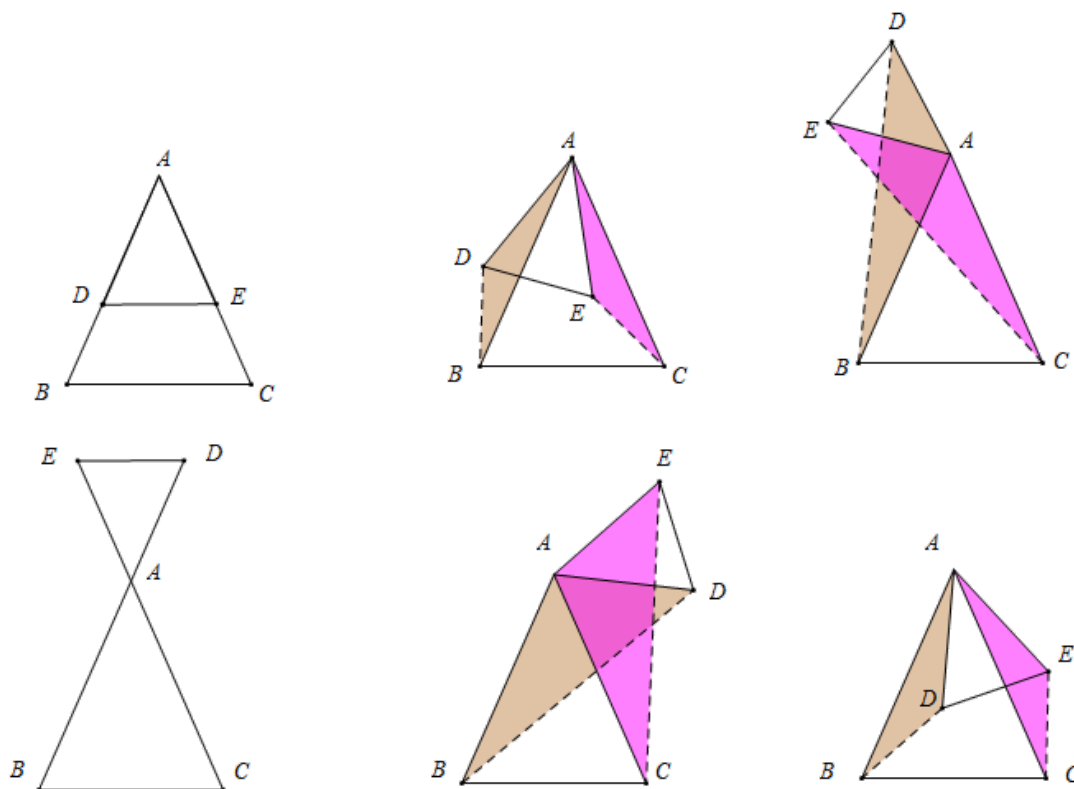
综上所述, 点  $A_1$  的坐标为  $(-1, -\sqrt{3})$  或  $(-2, 0)$ .

**【标注】**【知识点】旋转性质综合应用

## 二、旋转之手拉手模型

### 1. “手拉手”模型正用

已知等腰  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ , 过  $AB$  边上的一点  $D$  作  $BC$  边的平行线  $DE$  交  $AC$  于  $E$ , 将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  逆时针旋转一周.



由A点引发了两个共顶点的等腰三角形，大手  $AB = AC$ ，小手  $AD = AE$ ，  
大手拉小手，通过“SAS”可以证明  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

**！结论：**

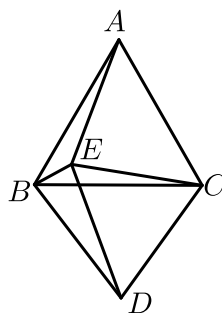
无论旋转多少度， $BD = CE$ ，BD、CE所形成的夹角有一角等于  $\angle BAC$ 。

**【备注】**手拉手模型即大手拉小手——大图形拉着一个小图形，当题干中出现“两个等角或两个等腰三角形在同一个顶点”时，就可以利用手拉手模型进行解决。

栗子7

11. 2017年天津滨海新区初三中考二模第17题3分 ★★★

如图，设  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  都是等边三角形，且  $\angle EBD = 62^\circ$ ，则  $\angle AEB$  的度数是 \_\_\_\_\_。



**【答案】**  $122^\circ$

**【解析】**  $\because \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  是等边三角形，

$$\angle EBD = 62^\circ,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$CE = CD,$$

$$\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ACE + \angle BCE,$$

$$\angle ECD = \angle BCE + \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

$$\triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DBC = \angle CAE,$$

$$\therefore 62^\circ - \angle EBC = 60^\circ - \angle BAE,$$

$$\therefore 62^\circ - (60^\circ - \angle ABE) = 60^\circ - \angle BAE,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAE)$$

$$= 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

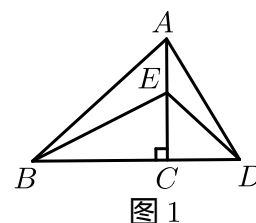
**【标注】**【知识点】等边三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

栗子8

12. 2015年北京东城区初三初三二模第28题 ★★★★★

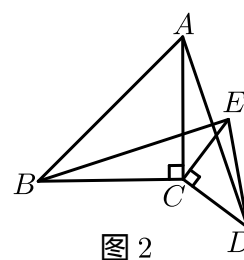
如图1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $E$  是边  $AC$  上任意一点 (点  $E$  与点  $A$ 、 $C$  不重合), 以  $CE$  为一直角边作  $\text{Rt}\triangle ECD$ ,  $\angle ECD = 90^\circ$ , 连接  $BE$ ,  $AD$ .



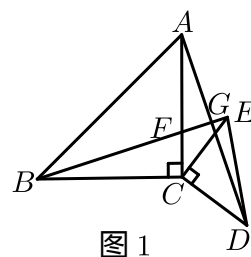
(1) 若  $CA = CB$ ,  $CE = CD$ ,

①猜想线段  $BE$ ,  $AD$  之间的数量关系及所在直线的位置关系, 直接写出结论;

②现将图1中的  $\text{Rt}\triangle ECD$  绕着点  $C$  顺时针旋转锐角  $\alpha$ , 得到图2, 请判断①中的结论是否仍然成立, 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.



(2) 若  $CA = CB = 8$ ,  $CE = CD = 3$ ,  $\text{Rt}\triangle ECD$  绕着点  $C$  顺时针旋转锐角  $\alpha$ , 如图3, 连接  $BD$ ,  $AE$ , 计算  $BD^2 + AE^2$  的值.



【答案】(1) ①  $BE = AD$ ,  $BE \perp AD$ .

②结论成立, 证明见解析.

(2)  $BD^2 + AE^2 = 146$ .

【解析】(1) ①  $BE = AD$ ,  $BE \perp AD$ ;

②  $BE = AD$ ,  $BE \perp AD$  仍然成立;

设  $BE$  与  $AC$  的交点为点  $F$ ,  $BE$  与  $AD$  的交点为点  $G$ , 如图1.

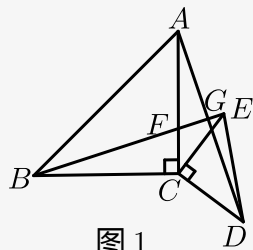


图 1

$$\because \angle ACB = \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE.$$

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCE$  中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE.$$

$$\therefore AD = BE, \angle CAD = \angle CBE.$$

$$\because \angle BFC = \angle AFG, \angle BFC + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG + \angle CAD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AGF = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp AD.$$

$$(2) AE^2 = AG^2 + EG^2, BD^2 = BG^2 + DG^2.$$

$$BD^2 + AE^2 = AG^2 + EG^2 + BG^2 + DG^2.$$

$$AG^2 + BG^2 = AB^2, EG^2 + DG^2 = ED^2,$$

$$BD^2 + AE^2 = AB^2 + ED^2 = CA^2 + CB^2 + CD^2 + CE^2 = 146.$$

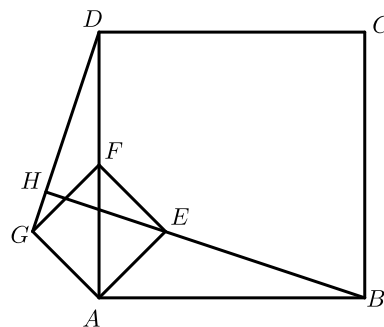
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

栗子9

变式：正方形、矩形手拉手

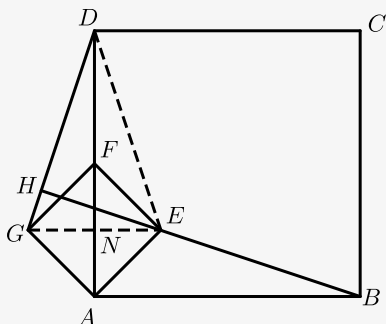
### 13. 2021年天津河西区初三中考零模第18题3分 ★★★

如图，四边形  $ABCD$  是正方形，有正方形  $AEFG$  绕点  $A$  逆时针旋转，当  $\angle BAE = 45^\circ$  时，连接  $DG$ ， $BE$ ，并延长  $BE$  交  $DG$  于点  $H$ 。若  $AB = 4$ ， $AE = \sqrt{2}$ ，则线段  $BH$  的长是 \_\_\_\_\_。



【答案】  $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

【解析】



连结  $GE$  交  $AD$  于点  $N$ ，连结  $DE$ ，如图，

$\because$  正方形  $AEFG$  绕点  $A$  逆时针旋转  $45^\circ$ ，

$\therefore AF$  与  $EG$  互相垂直平分，且  $AF$  在  $AD$  上，

$\therefore AE = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AN = GN = 1$ ，

$\therefore DN = 4 - 1 = 3$ ，

在  $Rt\triangle DNG$  中， $DG = \sqrt{DN^2 + GN^2} = \sqrt{10}$ ；

由题意可得： $\triangle ABE$  相当于逆时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle AGD$ ，

$\therefore DG = BE = \sqrt{10}$ ，

$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2}GE \cdot ND = \frac{1}{2}DG \cdot HE$ ，

$\therefore HE = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ ，

$\therefore BH = BE + HE = \frac{3\sqrt{10}}{5} + \sqrt{10} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ 。

故答案为： $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ 。

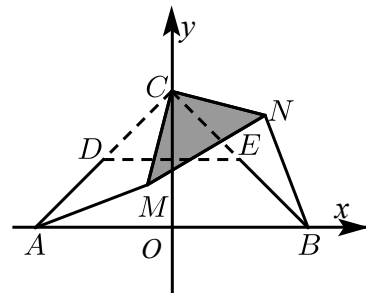
【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

## 独步天下1

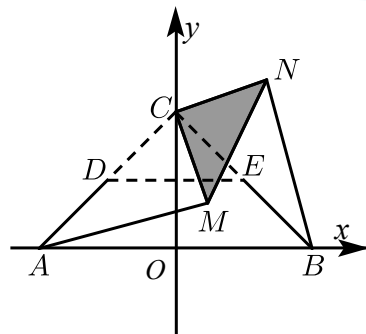
### 14. 2018年天津北辰区初三中考二模第24题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中，点  $A(-2,0)$ ， $B(2,0)$ ， $C(0,2)$ ，点  $D$ 、 $E$  分别是  $AC$ ， $BC$  的中点，将  $\triangle CDE$  绕点  $C$  逆时针旋转得  $\triangle CMN$ ，点  $M$ ， $N$  分别是点  $D$ ， $E$  旋转后的对应点，记旋转角  $\alpha$ 。

(1) 如图，求证  $AM = BN$ 。



(2) 如图，当  $\alpha = 75^\circ$  时，求点  $N$  的坐标。



( 3 ) 当  $AM \parallel CN$  , 求  $BN$  的长 ( 直接写出结果即可 ) .

**【答案】** ( 1 ) 证明见解析 .

( 2 )  $N \left( \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2} \right)$  .

( 3 )  $\sqrt{6}$  .

**【解析】** ( 1 )  $\because A(-2,0)$  ,  $B(2,0)$  ,  $C(0,2)$  ,

$$\therefore OA = OB = OC, \text{ 且 } \angle AOC = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\because D, E \text{ 分别是 } AC, BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore DC = CE,$$

$$\because \triangle MCN \text{ 是 } \triangle DCE \text{ 旋转得到的},$$

$$\therefore \angle ACM = \angle BCN, CM = CD, CE = CN,$$

$$\therefore CM = CN \text{ 且 } \angle ACM = \angle BCN, AC = BC,$$

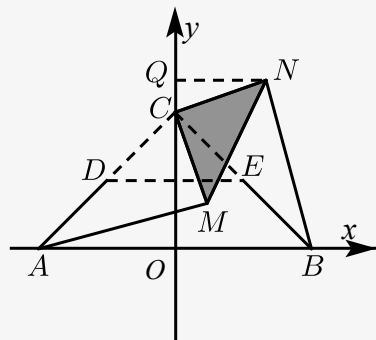
$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCN,$$

$$\therefore AM = BN.$$

( 2 ) 如图  $\because \angle BCO = 45^\circ$  ,  $\angle BCN = \angle \alpha = 75^\circ$  ,

$$\therefore \angle OCN = 120^\circ,$$

过点作  $NQ \perp y$  轴,  $Q$  为垂足 .



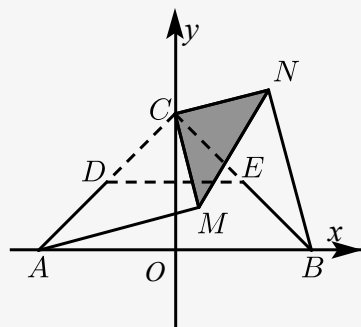
$$\therefore \angle NCQ = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCO \text{ 中}, BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = CN = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}
 &\text{在 Rt}\triangle NCQ \text{ 中, } \angle NCQ = 60^\circ, \therefore \angle QNC = 30^\circ, \\
 &\therefore CQ = \frac{1}{2}CN = \frac{\sqrt{2}}{2}, NQ = \sqrt{3}CQ = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\
 &\therefore OQ = CO + CQ = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}, \\
 &\therefore N \left( \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

(3) 如图,



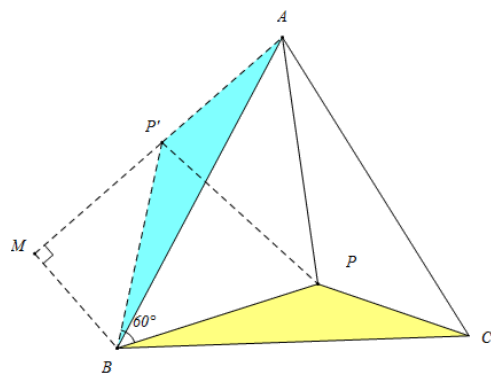
$$\begin{aligned}
 &\text{当 } AM \parallel CN \text{ 时, } \therefore \angle MCN = \angle AMC = 90^\circ, \\
 &\text{在 Rt}\triangle ACM \text{ 中, } AC = 2\sqrt{2}, CM = \sqrt{2}, \\
 &\therefore AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}, \\
 &\therefore AM = BN, \\
 &\therefore BN = \sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】象限内坐标的特征

## 2. “手拉手”模型逆用

**思考：**

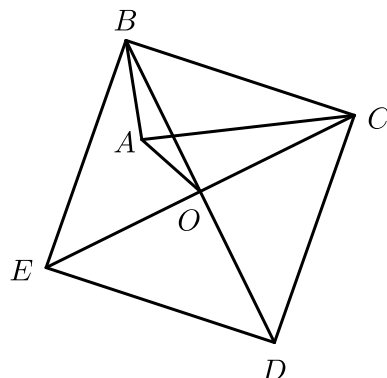
如图, 已知  $\triangle ABC$  为等边三角形, 点  $P$  在  $\triangle ABC$  内部,  $PA = 2$ 、 $PB = \sqrt{3}$ 、 $PC = 1$ , 求  $\angle BPC$  的度数及  $AB$  的长.



**【备注】** 将  $\triangle BPC$  绕点  $B$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle BPA'$ , 易得  $\triangle BPP'$  为等边三角形,  $PP' = BP = \sqrt{3}$ ,  $AP' = PC = 1$ , 由勾股逆定理可得  $\angle PP'A = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BP'A = \angle BPC = 150^\circ$ ;  
接下来利用两次勾股即可求出  $AB = \sqrt{7}$

15. ★★★

如图，以  $\text{Rt}\triangle ABC$  的斜边  $BC$  为一边作正方形  $BCDE$ ，设正方形的中心为  $O$ ，连接  $AO$ ，如果  $AB = 3$ ， $AO = 2\sqrt{2}$ ，那么  $AC$  的长等于（ ）。



A. 12

B. 7

C.  $\sqrt{17}$

D.  $6\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 如图，在  $CA$  上截取  $CM = AB$ ，连接  $OM$ ，

$\because$  四边形  $BCDE$  是正方形，

$\therefore OB = OC$ ，

$\angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABO + \angle AKB = 90^\circ$ ，

$\angle OCM + \angle OKC = 90^\circ$ ，

$\angle AKB = \angle OKC$ ，

$\therefore \angle ABO = \angle OCM$ ，

在  $\triangle ABO$  与  $\triangle MCO$  中，

$$\begin{cases} AB = CM \\ \angle ABO = \angle MCO \\ BO = CO \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle MCO$ ，

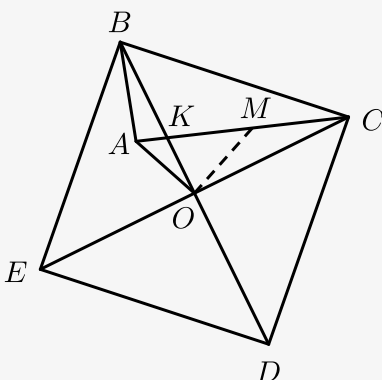
$\therefore AO = MO$ ， $\angle AOB = \angle COM$ ，

$\therefore \angle AOM = \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore AO = OM = 2\sqrt{2}$ ， $AB = CM = 3$ ，

$\therefore AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = 4$ ，

$\therefore AC = AM + CM = 4 + 3 = 7$ 。



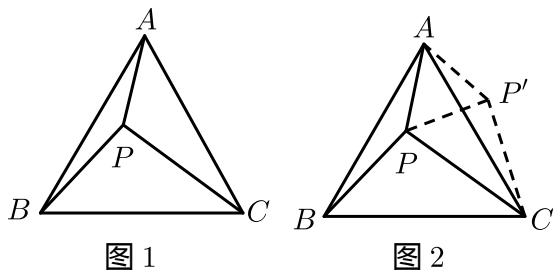
【标注】 【知识点】 等腰直角三角形的手拉手模型

16. 2016~2017学年北京西城区北京四中初三上学期期中第28题7分 ★★★★★

阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形  $ABC$  内有一点  $P$ ，且  $PA = 3$ ， $PB = 4$ ， $PC = 5$ ，求  $\angle APB$  的度数。

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造  $\triangle AP'C$ ，连接  $PP'$ ，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决。



(1) 图 1 中  $\angle APB$  的度数等于 \_\_\_\_\_。

(2) 如图 3，在正方形  $ABCD$  内有一点  $P$ ，且  $PA = 2\sqrt{2}$ ， $PB = 1$ ， $PD = \sqrt{17}$ ，则  $\angle APB$  的度数等于 \_\_\_\_\_，正方形的边长为 \_\_\_\_\_。

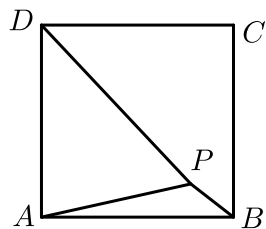


图 3

(3) 如图 4，在正六边形  $ABCDEF$  内有一点  $P$ ，且  $PA = 2$ ， $PB = 1$ ， $PF = \sqrt{13}$ ，则  $\angle APB$  的度数等于 \_\_\_\_\_，正六边形的边长为 \_\_\_\_\_（并写出解答过程）。

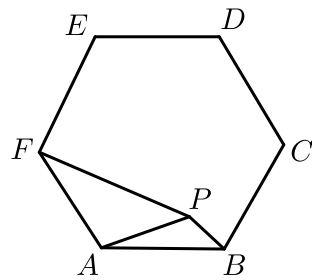


图 4

**【答案】** (1)  $150^\circ$

(2)  $135^\circ$ ； $\sqrt{13}$

(3)  $120^\circ$ ； $\sqrt{7}$

**【解析】** (1)  $\because \triangle ABC$  为正三角形， $PA = P'A$ ，

$\therefore \triangle APP'$  为正三角形，

$\therefore \angle AP'P = 60^\circ$ ， $P'P = AP = 3$ ，

$\therefore P'C = PB = 4$ ， $PC^2 = P'P^2 + P'C^2$

$$\therefore \angle PP'C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AP'C = 150^\circ.$$

( 2 )  $135^\circ$  ,  $\sqrt{13}$

( 3 ) 图 4 中  $\angle APB$  的度数等于  $120^\circ$  , 正六边形的边长为  $\sqrt{7}$  .

将  $\triangle APB$  绕点  $A$  逆时针旋转  $120^\circ$  得到  $\triangle AP'F$  , 连接  $P'P$  . 过点  $A$  作  $AN \perp P'P$  , 过点  $A$  作  $AH \perp FP'$  于点  $H$  .

$\because \triangle APB$  绕点  $A$  逆时针旋转  $120^\circ$  得到  $\triangle AP'F$  ,

$$\therefore \angle PAP' = 120^\circ, P'A = PA = 2,$$

$$P'F = PB = 1,$$

$$\therefore \angle AP'P = 30^\circ.$$

在  $\text{Rt}\triangle ANP'$  中,  $P'A = 2AN = 2$ ,

$$\therefore P'N = \sqrt{3},$$

$$\therefore PP' = 2\sqrt{3}.$$

在  $\triangle FPP'$  中,  $PF = \sqrt{13}$ ,  $PP' = 2\sqrt{3}$ ,  $P'F = 2$ .

$$\therefore PF^2 = P'F^2 + P'P^2,$$

$$\therefore \angle FP'P = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle FP'A = \angle FP'P + \angle AP'P = 120^\circ$$

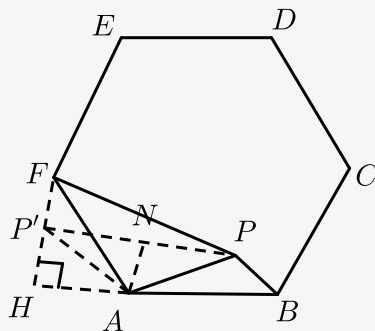
$$\therefore \angle HP'A = 60^\circ,$$

在  $\text{Rt}\triangle HP'A$  中,  $AP' = 2$ ,  $\angle P'AH = 30^\circ$ ,

$$\therefore HP' = 1.$$

在  $\text{Rt}\triangle HFA$  中,  $FA^2 = FH^2 + HA^2$ ,

$$\therefore FA = \sqrt{FH^2 + HA^2} = \sqrt{7}.$$



【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】旋转的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】解直角三角形的综合应用

【知识点】勾股定理的逆定理

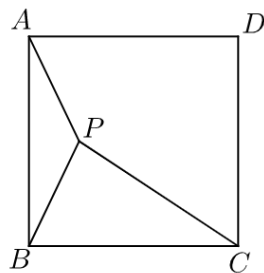
【知识点】勾股逆定理的应用

【能力】推理论证能力

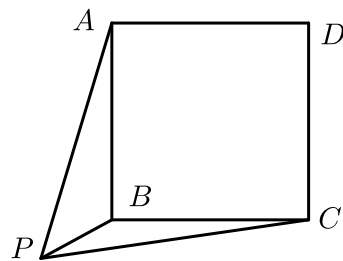
一节数学课上，老师提出了这样一个问题．如图①，点  $P$  是正方形  $ABCD$  内一点， $PA = 1$ ， $PB = 2$ ， $PC = 3$ ，你能求出  $\angle APB$  的度数吗？小宇通过观察，分析，思考，形成了如下思路：

思路一：将  $\triangle BPC$  绕点  $B$  逆时针旋转  $90^\circ$ ，得到  $\triangle BP'C$ ，连接  $PP'$ ，可以求出  $\angle APB$  的度数．

思路二：将  $\triangle APB$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$ ，得到  $\triangle CP'B$ ，连接  $PP'$ ，可以求出  $\angle APB$  的度数．



- (1) 请你参考小宇的思路，任选一种，写出完整的解答过程．
- (2) 类比讨论：如图②，点  $P$  是正方形  $ABCD$  外一点， $PA = 3$ ， $PB = 1$ ， $PC = \sqrt{11}$ ，则  $\angle APB$  的度数为 \_\_\_\_\_．（直接写出答案即可）



**【答案】** (1)  $135^\circ$ ．

(2)  $45^\circ$

**【解析】** (1) 思路一：将  $\triangle BPC$  绕点  $B$  逆时针旋转  $90^\circ$ ，

得到  $\triangle BP'C$ ，连接  $PP'$ ，

$\therefore \triangle ABP' \cong \triangle CBP$ ，

$\therefore \angle PBP' = 90^\circ$ ， $BP' = BP = 2$ ，

$AP' = CP = 3$ ，

在  $\text{Rt}\triangle PBP'$  中， $BP = BP' = 2$ ，

$\therefore \angle BPP' = 45^\circ$ ，

$PP' = \sqrt{2}BP = 2\sqrt{2}$ ，

$\because AP = 1$ ，

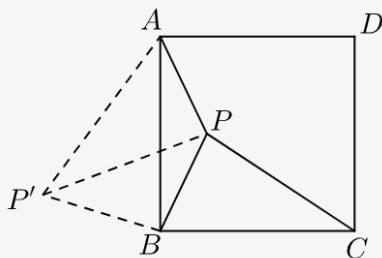
$\therefore AP^2 + PP'^2 = 1 + 8 = 9$ ，

$\therefore AP'^2 = 3^2 = 9$ ，

$\therefore AP^2 + PP'^2 = AP'^2$ ，

$\therefore \triangle APP'$  是直角三角形且  $\angle APP' = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ．



(2) 如图，将  $\triangle BPC$  绕点  $B$  逆时针旋转  $90^\circ$ ，

得到  $\triangle BP'A$  , 连接  $PP'$  .

$$\therefore \triangle ABP' \cong \triangle CBP ,$$

$$\therefore \angle PBP' = 90^\circ , \quad BP' = BP = 1 ,$$

$$AP' = CP = \sqrt{11} ,$$

在  $\text{Rt}\triangle PBP'$  中 ,  $BP = BP' = 1$  ,

$\therefore \angle BPP' = 45^\circ$  , 根据勾股定理 :

$$PP' = \sqrt{2}BP = \sqrt{2} ,$$

$$\because AP = 3 ,$$

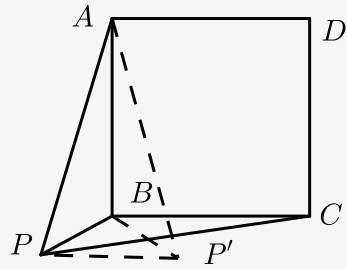
$$\therefore AP^2 + PP'^2 = 9 + 2 = 11 ,$$

$$\because AP'^2 = (\sqrt{11})^2 = 11 ,$$

$$\therefore AP^2 + PP'^2 = AP'^2 ,$$

$\therefore \triangle APP'$  是直角三角形且  $\angle APP' = 90^\circ$  ,

$$\therefore \angle APB = \angle APP' - \angle BPP' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ .$$



**【标注】**【知识点】旋转性质综合应用